



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XII-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1. (20 puncte)

Considerăm mulțimea $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = I_2\}$ (A^t este transpusa matricei A).

- Arătați că (G, \cdot) este grup.
- Există matricele $A, B \in G$, astfel încât $A + B \in G$?
- Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid {}^t A \cdot A = I_2\}$. Determinați numărul elementelor mulțimii H și arătați că (H, \cdot) este grup.

Subiectul 2. (20 puncte)

Considerăm funcția $f: [0, 1] \rightarrow \left[\frac{e}{2}, e^2\right]$, $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{2}{x+1}}$.

- Dacă $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă, arătați că:

$$\int_0^1 (1 + xg'(x)) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(1)}.$$

- Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

- Arătați că funcția f este inversabilă și calculați $\int_{\frac{e}{2}}^{e^2} f^{-1}(x) dx$.

Subiectul 3. (20 puncte)

Considerăm grupul $(G, *)$ unde $G = (2, \infty)$ și $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in G$.

- Dacă $a, b, c \in G$ și $a * b = c$, $b * c = a$, $c * a = b$, arătați că $a = b = c$.
- Determinați șirul $(a_n)_{n \geq 1} \subset G$, știind că $a_1 * a_2 * \dots * a_n = n + 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- Fie H un subgrup al grupului G care conține toate numerele naturale $k \geq 3$. Demonstrați că H conține toate numerele raționale $q > 2$.

Subiectul 4. (30 puncte)

Un leu aleargă după pradă plecând dintr-un punct O cu accelerația

$$a(t) = \left(\frac{4t^2+2}{e^{15}} + \frac{2t}{e^4}\right) e^{t^2} + 3t^2 - 12t + 9, \text{ măsurată în } m/s^2, \text{ timpul } t \geq 0, \text{ măsurat în secunde.}$$

La momentul $t = 0$ viteza sa este $v(0) = \left(1 + \frac{1}{e^4}\right) m/s$.

- Arătați că $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right) e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + 1, t \geq 0$.
- Stabiliți dacă există momente de timp în care leul este în repaus.
- Demonstrați că distanța parcursă de leu de la momentul $t = 1$ la $t = 4$ este mai mare decât 11 m.

Notă: Dacă $S(t)$ este spațiul parcurs de leu în t secunde, iar S este o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă, atunci viteza leului este $v(t) = S'(t)$, iar accelerația este $a(t) = S''(t)$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore; toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.